Opakování: Jazyk TM:

Symboly: proměnné, =, ∈, logické spojky, kvantifikátory, pomocné s.

Syntaxe: · atomické fle: $x = y$, $x \in y$

· φ, ψ jsou fle, pak $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), \dots$ jsou fle

· Pokud φ je fle, pak $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ jsou fle.

Například:

· $\cancel{(\forall x)}$ (x) fle? NE!

· $\cancel{(\forall x)}$ $x \in y$ zůstane fle

· $(\forall x)\, \alpha \in \beta$ je fle

Volné proměnné ve formuli: x Vázané pr.:

$((\forall a)\, a \in b) \vee a \in c$

vázaný volný výskyt

Této situaci se budeme vyhýbat:

Tzn. každá pr. bude mít buďto výhr. vázané výskyty, nebo výhr. volné výskyty

· $\neg(\exists x)(x \in y \wedge x \in z) \quad : \varphi(y, z)$

... y a z mají prázdný průnik $(y \cap z = \emptyset)$, tj. jsou disjunktní.

φ je formule s volnými právě y, z,

tj. je to výroková funkce, po dosazení za y, z vznikne výrok. Fle bez vol. pr. se nazývá uzavřená.

AXIOMY Zermelovy – Fraenkelovy TM

(axiomy (ZF), resp. (ZFC)
C... axiom výběru (Choice).)

- Axiom existence: $(\exists x)(x = x)$
- ax. extenzionality:

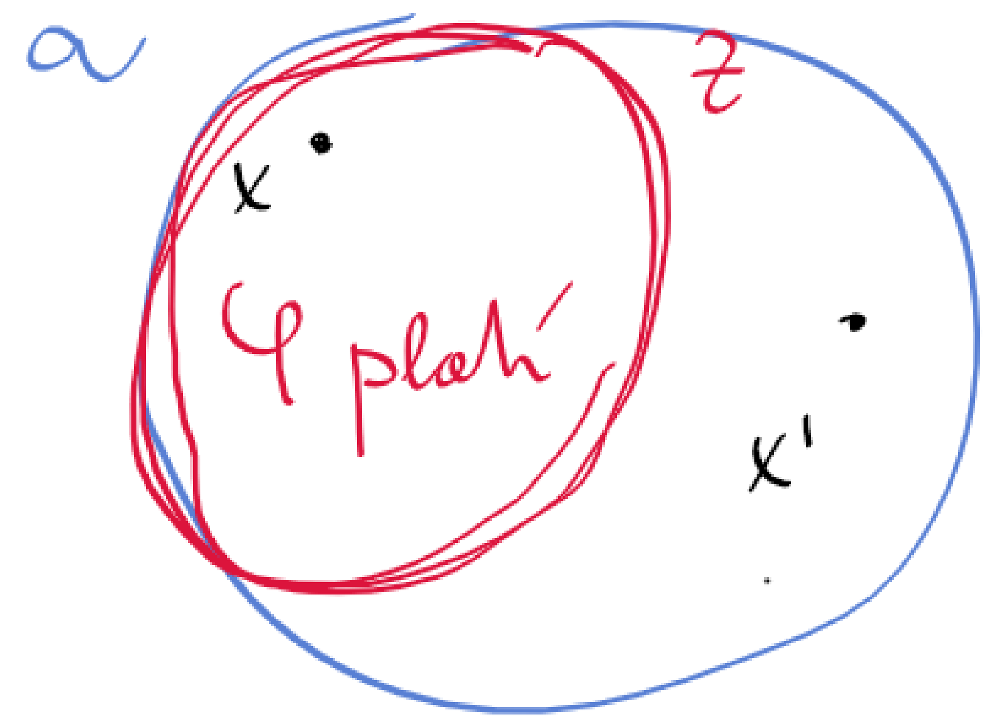
$$(\forall u)(u \in x \longleftrightarrow u \in y) \longleftrightarrow x = y.$$

(množina je určena svými prvky)

[← platí automaticky, protože relaci = chápeme tak, že $x = y \iff$ vše, co lze pravdivě prohlásit o x, platí i o y.]

- Schéma axiomů vydělení: Je-li $\varphi(x)$ formule (která neobsahuje proměnnou a), pak následující fle je ax. (ZF):

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)\big(x \in z \longleftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)\big).$$



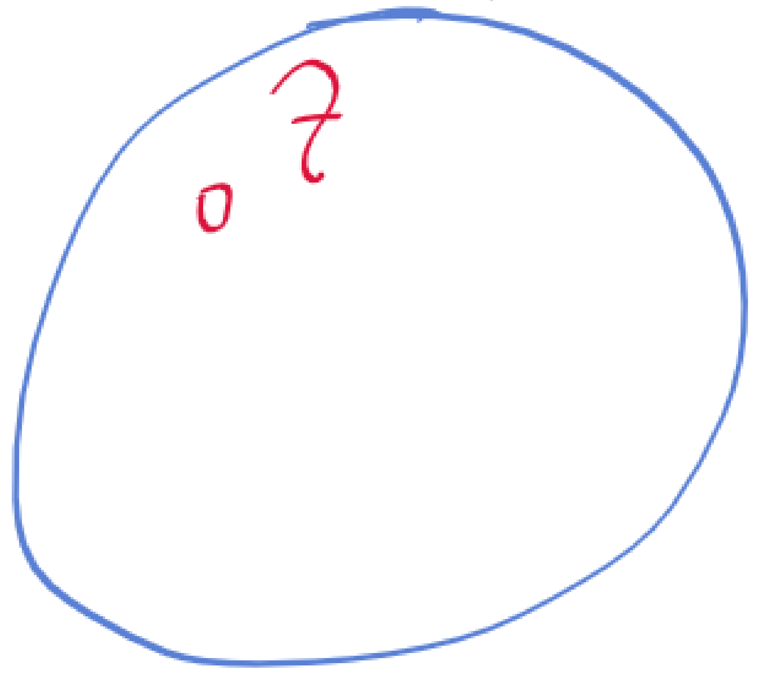
$\varphi(x)$ formule, která „popisuje nějakou vl. množin"

$\varphi(x)$? $\varphi(x')$? Vydělíme z a všechny prvky „splňující $\varphi(x)$" a shrneme je do „souboru" z. Ten axiom říká, že tento „soubor" je množina.

Popisuje přípustný způsob konstruování množin (z mn. už existujících)

Tvrzení: Existuje prázdná množina $\emptyset$.

Důkaz: Podle ax. existence existuje nějaká množina a.



$\varphi(x): \neg(x = x)$

(Stručněji: $\varphi(x): x \neq x$)

Podle ax. vydělení pro tuto fli $\varphi(x)$

$$(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$$

máme takovou množinu z.

Kdyby x (libovolná množina) splň. $x \in z$, pak: $x \in a \wedge \varphi(x)$, tj. $x \in a \wedge x \neq x$ ↯.

Tedy $(\forall x)\, x \notin z$ „Tj. z je prázdná"

- Axiom dvojice:

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)\big(x \in z \longleftrightarrow (x = a \vee x = b)\big)$$

$z = \{a, b\}$ ... z obsahuje množiny a, b jako své prvky.

$a = \mathbb{Z}$, $b = \mathbb{Q}^+$

$z = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}^+\}$

Jsou-li a, b mn., pak $a \cup b = \{x : x \in a \vee x \in b\}$

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \in a \vee x \in b)$$

$z = a \cup b$ – není ax.

- Axiom sumy:

$$(\forall a)(\exists z)\Big((\forall x)\big(x \in z \longleftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)\big)\Big).$$

$$z = \bigcup_{y \in a} y = \bigcup a. \quad (\text{suma } a)$$

Pokud $a = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$

$$\bigcup a = \Big(\bigcup_{i=1}^{5} y_i = \Big) = y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_5.$$

$$a = \{S, L\} \qquad \bigcup a = S \cup L = \mathbb{N}.$$

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ sudé}\}$$
$$L = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ lichá}\}$$

Jsou-li y_1, y_2 množiny, pak $y_1 \cup y_2 = \{x : x \in y_1 \vee x \in y_2\}$ je množina.

Dk: y_1, y_2 jsou mn. $\xRightarrow{\text{ax. dvojice}}$ $a = \{y_1, y_2\}$ je mn.

Podle axiomu sumy existuje

$z = \bigcup a$, tj. množina taková, že:

$$(\forall x)\big(x \in z \longleftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)\big)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\text{tj.})$$

$$(\forall x)\big(x \in z \longleftrightarrow (x \in y_1 \vee x \in y_2)\big)$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = y_1 \cup y_2.$$

$\boxtimes$

Cv.: Dokažte, že, jsou-li a, b mn., průnik a, b je množina $(a \cap b)$.

$a \cap b = \{x : x \in a \wedge x \in b\}$.

$= \{x \in a : x \in b\}$.

• Axiom potence:

„je podmn." zkratka

$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow \boxed{x \subseteq a})$

$\Longleftrightarrow$ (je zkratka za:)

$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\boxed{(\forall y)\, y \in x \longrightarrow y \in a}))$

• Schéma axiomů nahrazení:

Definovatelný obraz množiny je množina.

Resp.: Obraz množiny při zobrazení definovatelném výrokem je množina.

• Axiom nekonečna:

$(\exists z)(\boxed{\emptyset \in z \wedge (\forall x)(x \in z \longrightarrow x \cup \{x\} \in z)})$

„Existuje induktivní množina z"

$x \cup \{x\}$ ... následník x

$0 = \emptyset$

$1 = 0 \cup \{0\}$ ... Von Neumannova def.

$2 = 1 \cup \{1\}$